Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.

PENGANTAR ALJABAR LINEAR

DISERTAI PETA KONSEP

Pustaka Setia

Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.

PENGANTAR ALJABAR LINEAR

DISERTAI PETA KONSEP

Penerbit PUSTAKA SETIA Bandung

PENGANTAR ALJABAR LINEAR Disertai Peta Konsep

ISBN: 978–979–076–713–3

-- Cet. Ke-1-- Bandung: Pustaka Setia, April 2019
x + 196 hlm.; 16 × 24 cm.

Penulis: **Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.**

Desain Sampul: **Tim Desain Pustaka Setia**

Setting, Montase, Layout: **Tim Redaksi Pustaka Setia**

Cetakan Ke-1: April 2019

Diterbitkan oleh: **CV PUSTAKA SETIA**
Jl. BKR (Lingkar Selatan) No. 162–164
Telp. (022) 5210588 Faks. (022) 5224105
E-mail: pustaka_seti@yahoo.com
Website: www.pustakasetia.com
BANDUNG 40253

(Anggota IKAPI Cabang Jawa Barat)

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT., yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyusun buku yang berjudul **Pengantar Aljabar Linear**. Buku ini berupa Buku Seri Aktif yang dilengkapi Lembar Aktivitas, dengan tujuan agar pembaca dapat melakukan aktivitas matematika (*doing math*) dalam memecahkan permasalahan yang diberikan. Latihan soal (*exercise*) diberikan dalam bahasa Inggris yang bertujuan melatih pembaca agar terampil dalam membaca dan memahami buku teks matematika. Selain itu, buku ini juga disusun sebagai penunjang perkuliahan Aljabar Linear.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saran dan kritik demi penyempurnaan buku ini selalu penulis harapkan.

Akhir kata, semoga buku ini dapat bermanfaat.

Bandung, Maret 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1

RUANG-n *EUCLIDIS* (*EUCLIDEAN n-SPACES*)

Aljabar linear adalah bidang studi matematika yang mempelajari sistem persamaan linear dan solusinya, sifat-sifat khusus ruang vektor (termasuk matriks), serta transformasi linear. Matriks dan operasinya juga merupakan hal yang berkaitan erat dengan bidang aljabar linear.

A. Vektor-vektor dalam Ruang Berdimensi-n

Sekitar pertengahan abad ke-17, penggunaan pasangan bilangan (a_1, a_2) untuk meletakkan titik-titik pada bidang (R^2) dan tripel bilangan (a_1, a_2, a_3) untuk meletakkan titik-titik di ruang dimensi-3 (R^3), diungkapkan secara jelas. Menjelang akhir abad ke-19, para ahli matematika dan fisika mulai menyadari bahwa peletakan titik-titik tersebut tidak perlu berhenti dengan tripel (Howard A., 1987), tetapi perlu pengembangan ke R^4, R^5, bahkan sampai R^n. Hal ini dapat dilihat pada sistem persamaan linear yang telah dipelajari (Imrona, 2013: 61). Saat itu, dikenal bahwa kuadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) dapat ditinjau sebagai titik pada ruang berdimensi-4; kuintupel (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) dapat ditinjau sebagai titik pada ruang berdimensi-5, dan seterusnya (Howard A., 1987: 131).

Secara visualisasi geometrik peletakan titik tidak melebihi ruang dimensi-3, namun dalam hal ini masalah visualisasi tidak dapat dilaksanakan hanya karena dunia ini hanya disusun oleh konsep tiga dimensi (Imrona, 2013; 61). Kita akan memperluas gagasan tentang ruang yang melebihi ruang dimensi-3 dengan bekerja pada *sifat analitik* atau *sifat numeris titik* dan *vektor*, bukan bekerja dengan sifat geometrik.

Definisi 1.1

Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif atau bilangan asli ($B_+ = A$), maka *tupel n-terorde* (n tupel terurut $a_1, a_2, ..., a_n$) adalah sebuah barisan bilangan real. Himpunan semua tupel terurut disebut ruang-n, dinyatakan dengan R^n.

Contoh 1.1

Ruang-1 (R^1)	: himpunan satu tupel terurut
	: $\{(a_1) \mid a_1 \in R\}$
	: {himpunan titik pada garis}
	: {himpunan bilangan real}
Ruang-2 (R^2)	: himpunan dua tupel terurut
	: $\{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in R\}$
	: {himpunan pasangan terurut}
	: {himpunan titik pada bidang}
	: {himpunan vektor pada bidang}
Ruang-3 (R^3)	: himpunan tiga tupel terurut
	: $\{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in R\}$
	: {himpunan tripel terurut}
	: {himpunan titik pada ruang}
	: {himpunan vektor pada ruang}

Pada ruang-3 (R^3) simbol (a_1, a_2, a_3) mempunyai dua tafsiran geometrik yang berbeda. Simbol tersebut dapat ditafsirkan sebagai titik, di mana a_1, a_2, a_3 adalah koordinat (lihat gambar 1.1a) atau simbol tersebut dapat ditafsirkan sebagai vektor, di mana a_1, a_2, a_3 adalah komponen-komponen (lihat gambar 1.1b). Adapun gambar 1.1c memperlihatkan kedudukan titik (2, 4, 3) pada bidang xyz. Dalam hal ini, kita bebas menafsirkan tupel-n, misalnya untuk tupel-4 (a_1, a_2, a_3, a_4), baik sebagai titik dalam R^4 maupun sebagai vektor dalam R^4, dan seterusnya. Kita akan menggunakan kedua deskripsi tersebut.

BAB 2

RUANG VEKTOR UMUM (*GENERAL VECTOR SPACES*)

A. Aksioma Ruang Vektor

Pada bagian ini, kita akan lebih jauh lagi membentuk konsep vektor. Kita akan menyatakan serangkaian aksioma yang jika dipenuhi oleh sekelompok objek akan memberi hak pada objek-objek itu disebut sebagai vektor. Aksioma-aksioma tersebut akan dipilih dengan menyarikan sifat-sifat yang paling penting dalam R^n; akibatnya vektor-vektor dalam R^n otomatis memenuhi aksioma-aksioma ini. Jadi, konsep baru tentang suatu vektor ini akan mencakup vektor lama dan banyak jenis vektor yang baru. Vektor-vektor jenis baru ini akan mencakup berbagai jenis matriks dan fungsi (Howard A., 1987).

Apabila kita memerhatikan vektor R^n dan matriks $M_{m \times n}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar, keduanya mempunyai sifat yang sama sehingga mendorong didefinisikannya ruang vektor (Imrona, 2013, 65).

Definisi 2.1

Kita akan menyatakan sekumpulan aksioma yang jika dipenuhi oleh sekelompok benda, benda tersebut akan kita namakan vektor.

Misalkan, himpunan V adalah benda-benda yang tidak kosong dengan operasi penjumlahan pada V dan operasi perkalian dengan skalar. V disebut ruang vektor, jika memenuhi sepuluh aksioma berikut.

1. Jika untuk setiap u dan v benda-benda dalam V, maka u + v dalam V.
2. Jika untuk setiap u dan v dalam V, maka u + v = v + u.
3. Jika untuk setiap u, v, dan w dalam V, maka: u + (v + w) = (u + v) + w.
4. Ada O dalam V sehingga u + O = O + u = u untuk setiap u dalam V.
5. Jika untuk setiap u dalam V, ada sebuah benda –u di V yang disebut negatif dari u sehingga: u + (–u) = (–u) + u = O.
6. Jika k sebarang skalar dan u adalah sebarang benda dalam V, maka ku berada dalam V.
7. Jika u dan v dalam V dan k sebarang skalar, maka: k(u + v) = ku + kv.
8. Jika u dalam V dan k, ℓ sebarang skalar, maka: $(k + \ell)u = ku + \ell u$.
9. Jika u dalam V dan k, ℓ sebarang skalar, maka: $k(\ell u) = (k\ell)u$.
10. Jika u dalam V, maka 1u = u.

Catatan:

- Anggota-anggota dari ruang vektor V disebut vektor-vektor dalam V.
- Operasi standar pada R^n adalah operasi penjumlahan dan perkalian skalar pada R^n.

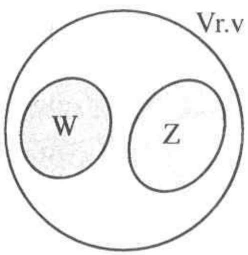
Dalam hal ini, tentunya yang paling menentukan apakah V disebut ruang vektor atau tidak adalah operasi-operasi pada V atau bentuk dari V itu sendiri. Jika V merupakan ruang vektor dengan operasi-operasi vektor (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar) yang bukan merupakan operasi standar, tentunya V harus memenuhi 10 syarat di atas. Jika satu saja syarat tidak dipenuhi, maka V bukan merupakan ruang vektor.

BAB 3

RUANG BAGIAN (*SUBSPACES*)

A. Definisi Suatu Ruang Bagian

Suatu ruang vektor mungkin saja terkandung di ruang vektor yang lebih besar.



$W \subseteq Vr.v$

$Z \subseteq Vr.v$

Himpunan bagian yang tidak kosong dari suatu ruang vektor, mungkin merupakan ruang vektor, mungkin juga bukan merupakan ruang vektor. Himpunan bagian yang merupakan ruang vektor, dijelaskan lebih terperinci pada definisi berikut.

Definisi 3.1

Misalkan, W adalah suatu himpunan bagian dari suatu ruang vektor V, dan $W \neq \phi$. W disebut ruang bagian dari V, jika W adalah ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Umumnya, kita harus membuktikan kesepuluh aksioma ruang vektor untuk memperlihatkan bahwa himpunan dengan penjumlahan dan perkalian skalar membentuk sebuah ruang vektor. Akan tetapi, jika W adalah bagian dari himpunan vektor yang lebih besar, yang kita kenal sebagai ruang vektor, maka aksioma tertentu tidak perlu dibuktikan untuk W karena aksioma-aksioma tersebut sudah "diwarisi" dari V.

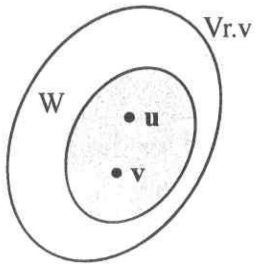
Misalnya, kita tidak perlu memeriksa u + v = v + u (aksioma 2) untuk W karena ini berlaku untuk semua vektor pada V sehingga konsekuensinya akan berlaku juga untuk semua vektor pada W. Untuk membuktikan bahwa W merupakan ruang bagian (*subspaces*) dari ruang vektor V, kita hanya perlu memeriksa aksioma 1 dan aksioma 6 (Howard A., 1987).

Teorema 3.1

Misalkan, W adalah himpunan bagian dari ruang vektor V, $W \neq \phi$. W adalah ruang bagian dari V, jika dan hanya jika:

a. untuk setiap u dan v dalam W, u + v dalam W;
b. untuk setiap skalar k dan untuk setiap u dalam W, ku dalam W.

Jadi, kita cukup memeriksa aksioma 1 dan aksioma 6 untuk membuktikan suatu ruang bagian.



Teorema ini jika dituliskan dalam bentuk lambang matematika sebagai berikut.

$W \subseteq Vr.v$ dan $W = \phi \longrightarrow Wr.b \longleftrightarrow$

a. $\forall u, v \in W \longrightarrow (u + v) \in W$ (aksioma 1)
b. $\forall u \in W, \forall k \in R \longrightarrow ku \in W$ (aksioma 6)

BAB 4

KEBEBASAN LINEAR (*LINEAR INDEPENDENCE*)

A. Definisi dan Contoh-contoh Permasalahan Kebebasan Linear

Definisi 4.1

Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor: $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$ mempunyai satu pemecahan, yaitu $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$. Jika ini adalah satu-satunya pemecahan (*trivial*), maka S kita namakan himpunan bebas linear (*linearly independent*) dan jika ada pemecahan lain (*non-trivial*), maka S kita namakan himpunan tak-bebas linear (*linearly dependent*).

Jika kita perhatikan bentuk persamaan $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$ merupakan sistem persamaan linear homogen (SPL homogen) sehingga dalam memecahkan permasalahan kebebasan linear sangat berkaitan dengan penyelesaian pada SPL homogen. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh 4.1

Tinjaulah himpunan vektor-vektor $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, di mana:

$v_1 = (1, -2, 0, 3)$; $v_2 = (3, -1, 4, 2)$; dan $v_3 = (5, -1, 2, 4)$.

Selidikilah apakah S bebas linear!

Penyelesaian:

S bebas linear, jika persamaan vektor: $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$ mempunyai satu pemecahan, yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, dan $k_3 = 0$.

$v_1 = (1, -2, 0, 3)$; $v_2 = (3, -1, 4, 2)$; dan $v_3 = (5, -1, 2, 4)$

Syarat bebas linear adalah persamaan:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

mempunyai satu pemecahan, yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, dan $k_3 = 0$.

$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $k_1(1, -2, 0, 3) + k_2(3, -1, 4, 2) + k_3(5, -1, 2, 4) = (0, 0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow$ $(k_1, -2k_1, 0, 3k_1) + (3k_2, -k_2, 4k_2, 2k_2) + (5k_3, -k_3, 2k_3, 4k_3) = (0, 0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow$ $(k_1 + 3k_2 + 5k_3, -2k_1 - k_2 - k_3, 0 + 4k_2 + 2k_3, 3k_1 + 2k_2 + 4k_3) = (0, 0, 0, 0)$

Sistem tersebut berpadanan dengan:

$$k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 0$$
$$-2k_1 - k_2 - k_3 = 0$$
$$4k_2 + 2k_3 = 0$$
$$3k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0$$

Bentuk matriks yang diperbesarnya (*the augmented matrix*) adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan reduksi baris sistem tersebut diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow 2b_1 + b_2 \\ \\ \rightarrow -3b_1 + b_4 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -11 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow \frac{1}{5}b_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

BAB 5

BASIS DAN DIMENSI
(*BASES AND DIMENSION*)

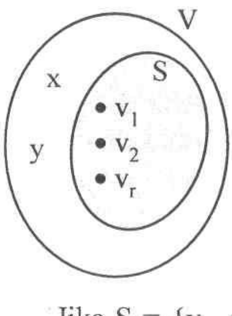
A. Basis

Definisi 5.1

Jika V adalah sebarang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V, maka S dapat dikatakan sebuah basis untuk V jika:

1. S bebas linear;
2. S merentang V.

Definisi di atas, dapat diilustrasikan melalui diagram Venn berikut ini.



Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ bebas linear, maka harus memenuhi persamaan vektor:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$$

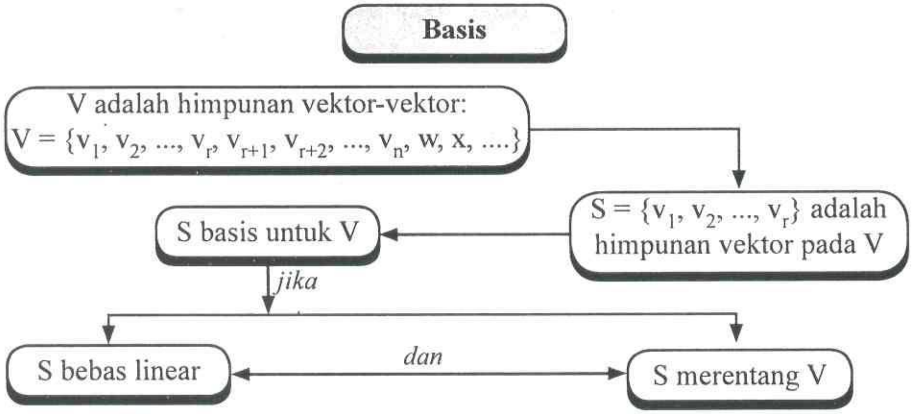
mempunyai hanya satu pemecahan, yaitu:

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$$

Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ merentang/membangun V, maka masing-masing vektor pada V, misalnya u, x, dan y dapat dinyatakan sebagai kombinasi-linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

B. Peta Konsep (*Concept Map*) Basis

Berdasarkan uraian tentang basis yang telah dibahas, maka peta konsep (*concept map*)-nya sebagai berikut.



Gambar 5.1

Peta konsep (*concept map*) basis

C. Basis Baku untuk R^n

Contoh 5.1

Tunjukkan bahwa $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ di mana $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$; dan $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ adalah suatu basis untuk ruang vektor R^n!

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ adalah suatu basis untuk ruang vektor R^n, kita harus menunjukkan bahwa S merentang R^n dan S adalah himpunan yang bebas linear.

$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ merentang R^n karena ada sebarang vektor dalam R^n, misalnya vektor $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ yang dapat dinyatakan sebagai $c = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n$, yaitu:

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n) = c_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + c_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + c_n(0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Hal ini berarti bahwa c merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Dengan demikian, S merentang R^n.

BAB 6

RUANG BARIS DAN RUANG KOLOM MATRIKS; RANK; PENERAPAN TERHADAP PENCARIAN BASIS (*ROW AND COLUMN SPACE OF MATRIX; RANK; APPLICATION OF FINDING BASES*)

A. Pencarian Basis

Pada bagian ini, kita akan telaah ruang vektor tertentu yang dihubungkan dengan matriks-matriks dan mempelajari suatu prosedur sederhana untuk mencari basis dengan mereduksi matriks yang sesuai dengan bentuk eselon baris. Kita mulai dengan beberapa definisi berikut.

Definisi 6.1 dan 6.2 mendefinisikan tiga ruang vektor penting yang dikaitkan dengan suatu matriks.

Definisi 6.1

Untuk suatu matriks $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vektor-vektor:

$r_1 = (a_{11} \quad a_{12} \dots a_{1n})$

$$
\begin{array}{l}
r_2 = (a_{21} \quad a_{22} \; \ldots \; a_{2n}) \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
r_m = (a_{m1} \quad a_{m2} \; \ldots \; a_{mn})
\end{array}
$$

terbentuk dari baris-baris pada matriks A dan disebut vektor-vektor baris dari A. Adapun vektor-vektor:

$$
c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \; c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \ldots; \; c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}
$$

terbentuk dari kolom-kolom matriks A dan disebut *vektor-vektor kolom dari A*. Subruang dari R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris dari A disebut *ruang baris dari A*, dan subruang dari R^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari A disebut *ruang kolom dari A*.

Contoh 6.1

Anggaplah:

$$
A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}
$$

Vektor-vektor baris dari A adalah:

$$
\begin{array}{l}
b_1 = [\,5 \quad 7 \quad -2 \quad 4\,] \\
b_2 = [\,8 \quad -4 \quad 3 \quad 5\,] \\
b_3 = [\,2 \quad -2 \quad -1 \quad -2\,]
\end{array}
$$

dan vektor-vektor kolom dari A adalah:

$$
k_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}; \; k_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}; \; k_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}; \text{ dan } k_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

BAB 7

RUANG HASIL KALI DALAM (*THE INNER PRODUCT SPACES*)

A. Definisi Ruang Hasil Kali Dalam

Pada pembahasan awal, kita telah membicarakan tentang hasil kali dalam *Euclidis* (*The Euclidean Inner Product*) pada ruang vektor R^n. Pada bagian ini, kita akan memperkenalkan notasi hasil kali dalam dari sebarang vektor real.

Definisi 7.1

Sebuah hasil kali dalam (*the inner product*) pada ruang vektor real V adalah fungsi yang mengasosiasikan/menghubungkan bilangan real $< u, v >$ dengan masing-masing pasangan vektor u dan v pada V sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor u, v, dan w di V dan juga untuk semua skalar k.

1. $< u, v > = < v, u >$ (komutatif)
2. $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$ (distributif)
3. $< ku, v > = k < u, v >$ (asosiatif)
4. $< v, v > \geq 0$ dan $< v, v > = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$ (simetri/kepositifan)

Contoh 7.1

Jika $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ adalah vektor-vektor pada R^n, maka rumus $< u, v >$ ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} < u, v > &= u . v \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n \end{aligned}$$

Bentuk ini mendefinisikan < u, v > terhadap hasil kali dalam *Euclidis* pada R^n.

Contoh 7.2

Jika u = (1, 2, –2, 4) dan v = (2, –5, 7, 3), maka:

$$\begin{aligned} < u, v > &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 \\ &= (1)(2) + (2)(-5) + (-2)(7) + (4)(3) \\ &= 2 - 10 - 14 + 12 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Ada beberapa penerapan yang memodifikasi hasil kali dalam *Euclidis* dengan pembobotan suku-sukunya. Perhatikan contoh berikut.

$$< u, v > = k_1u_1v_1 + k_2u_2v_2 + \dots + k_nu_nv_n$$

Bentuk ini didefinisikan sebagai hasil kali dalam *Euclidis* yang diboboti dengan bobot $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Contoh 7.3

Jika u = (u_1, u_2) dan v = (v_1, v_2) adalah vektor-vektor pada R^2 dan hasil kali dalam *Euclidis* yang diboboti:

$$< u, v > = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

Hitunglah < u, v > jika u = (–5, 3) dan v = (4, 6)!

Jawab:

$$\begin{aligned} < u, v > &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \\ &= 3(-5)(4) + 2(3)(6) \\ &= -60 + 36 \\ &= -24 \end{aligned}$$

Contoh 7.4

Jika $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ dan $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$

adalah sebarang dua matriks yang berukuran 2 × 2, maka rumus berikut mendefinisikan hasil kali dalam pada M_{22}.

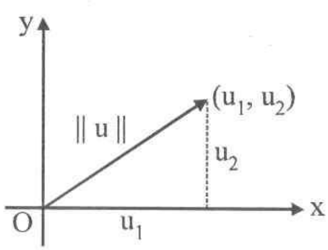
$$< U, V > = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

BAB 8

PANJANG, JARAK, DAN SUDUT DI RUANG HASIL KALI DALAM (*THE LENGTH, DISTANCE, AND ANGLE IN THE INNER PRODUCT SPACES*)

A. Panjang Vektor di Ruang Hasil Kali Dalam

Panjang sebuah vektor u bisa pula dinamakan norma u, dinyatakan dengan $\| u \|$. Hal ini jelas berasal dari teorema Pythagoras. Perhatikan gambar berikut ini.

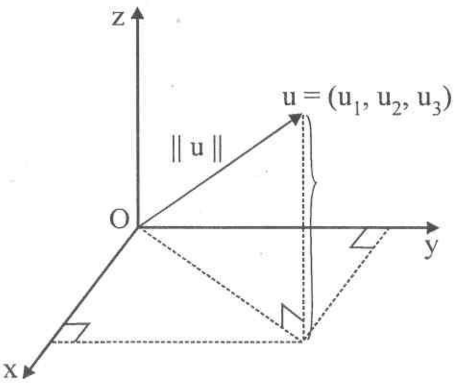


Gambar 8.1

Jika $u = (u_1, u_2)$, maka panjang vektor u adalah:

$$\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Pada gambar 8.1, vektor u berada di ruang-2, jika $u = (u_1, u_2, u_3)$ adalah vektor di ruang-3, maka panjang (norma) u dapat dicari dengan menggunakan gambar 8.2 dan dua penerapan teorema Pythagoras.



Gambar 8.2

Panjang vektor u = (u_1, u_2, u_3) di ruang-3 adalah:

$$\| u \| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$$

Secara umum, norma *Euclidis* vektor u = (u_1, u_2, ..., u_n) pada R^n didefinisikan sebagai

$$\| u \| = (u \,.\, u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + \ldots + u_n^{\,2}}$$

Definisi 8.1

Jika V adalah ruang hasil kali dalam, maka norma (panjang) vektor u dinyatakan oleh || u || dan didefinisikan sebagai

$$\| u \| = (u \,.\, u)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| u \| = \langle u \,.\, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Contoh 8.1

Jika u = (2, 1) tentukan norma (panjang) *Euclidis* dari u!

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \| u \| &= \langle u \,.\, u \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Jadi, norma (panjang) *Euclidis* dari u adalah $\sqrt{5}$.

BAB 9

BASIS ORTONORMAL; PROSES GRAM-SCHMIDT (*ORTHONORMAL BASES; GRAM-SCHMIDT PROCESS*)

A. Himpunan Ortonormal

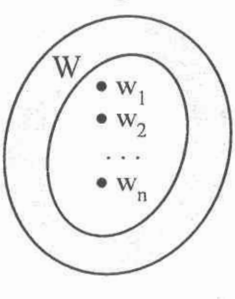
Definisi 9.1

Misalkan V ruang hasil kali dalam dan $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$, $W \subseteq V$. Himpunan W disebut ortonormal jika W himpunan ortogonal dan panjang setiap anggota W adalah 1, atau dalam bentuk lambang ditulis sebagai berikut.

1. $< w_i, w_j > = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dengan $i, j = 1, 2, \ldots, r$.
2. $\| w_i \| = 1$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, r$.

Apabila diilustrasikan ke dalam bentuk diagram, seperti berikut.

$V_{\text{ruang hasil kali dalam}}$



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \langle w_1, w_2 \rangle = 0 \\ \langle w_1, w_n \rangle = 0 \\ \langle w_2, w_n \rangle = 0 \\ \text{dan seterusnya} \end{array}\right\} \text{himpunan ortogonal} \\ \| w_1 \| = \| w_2 \| = \ldots \| w_n \| = 1 \end{array}\right\} \text{himpunan ortonormal}$$

Contoh 9.1

Misalkan:

$$v_1 = (0, 1, 0);\ v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \text{dan}\ v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Buktikan apakah himpunan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormal terhadap ruang hasil kali dalam *Euclidis*!

Penyelesaian:

Keortonormalan dipenuhi jika $< v_1, v_2 > = < v_1, v_3 > = < v_2, v_3 > = 0$

$$\begin{aligned} < v_1, v_2 > = v_1 \cdot v_2 &= (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)(0) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < v_1, v_3 > = v_1 \cdot v_3 &= (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)(0) + (0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < v_2, v_3 > = v_2 \cdot v_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0)(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + 0 + -\frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa $< v_1, v_2 > = < v_1, v_3 > = < v_2, v_3 > = 0$.

Keortonormalan dipenuhi jika setiap vektor di S mempunyai norma 1.

$$\| v_1 \| = \langle v_1, v_1 \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\| v_2 \| = \langle v_2, v_2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\| v_3 \| = \langle v_3, v_3 \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Terlihat bahwa $\| v_1 \| = \| v_2 \| = \| v_3 \|| = 1$.

BAB 10

TRANSFORMASI LINEAR (*LINEAR TRANSFORMATION*)

A. Pengertian Transformasi Linear

Pada pembahasan ini, kita akan mempelajari fungsi yang bernilai vektor dari sebuah peubah vektor yang berbentuk w = F(v), yaitu F mengasosiasikan vektor w dengan vektor v, dan kita mengatakan bahwa w adalah bayangan dari v di bawah F. Ruang vektor V dinamakan daerah asal (domain) V.

Jika V dan W adalah ruang vektor dan F adalah sebuah fungsi yang mengasosiasikan sebuah vektor yang unik di dalam W dengan sebuah vektor di dalam V, maka kita mengatakan F memetakan V ke dalam W, dan kita menuliskan $F : V \rightarrow W$.

Untuk melukiskannya, maka jika v = (x, y) adalah sebuah vektor di dalam R^2, maka rumus F(v) = (x + 2y, x − y, x − 3y) mendefinisikan sebuah fungsi yang memetakan R^2 ke dalam R^3, khususnya jika v = (1, 2), maka x = 1 dan y = 2 sehingga F(1, 2) = (5, −1, −5) merupakan bayangan/peta dari v di bawah F dan (1, 2) merupakan prapeta dari (5, −1, −5).

Demikian pula, misalkan F pemetaan dari R^3 ke dalam R^2, jika v = (x, y, z) dengan rumus F(v) = (x + y, x − 2z) dan jika v = (1, 0, −1) sehingga F(1, 0, −1) = (1, 3) merupakan bayangan/peta dari v di bawah F dan (1, 0, −1) merupakan prapeta dari (1, 3).

B. Beberapa Contoh Transformasi Linear

Contoh 10.1

Misalkan, $F : R^2 \rightarrow R^3$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh:

$$F(x, y) = (x, x + y, x - y)$$

Tentukan apakah F merupakan transformasi linear?

Jawab:

Ambil $u, v \in R^2$ misalkan $u = (x_1, y_1)$ dan $v = (x_2, y_2)$ maka:

$$F(u) = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) \text{ dan } F(v) = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

F merupakan transformasi linear jika memenuhi aksioma:

1. $F(u + v) = F(u) + F(v)$ untuk semua vektor u dan v dalam V

   Bukti:

   Ruas kiri:

   $$\begin{aligned} F(u + v) &= (x_1 + x_2, [x_1 + x_2] + [y_1 + y_2], [x_1 + x_2] - [y_1 + y_2]) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \\ &= (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= F(u) + F(v) \\ &= \text{ruas kanan (terbukti)} \end{aligned}$$

2. $F(ku) = kF(u)$ untuk semua vektor u dalam V dan semua skalar k

   Bukti:

   Ruas kiri:

   $$\begin{aligned} F(ku) &= (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\ &= [k(x_1), k(x_1 + y_1), k(x_1 - y_1)] \\ &= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\ &= kF(u) \\ &= \text{ruas kanan (terbukti)} \end{aligned}$$

Karena kedua aksioma dipenuhi maka $F(x, y) = (x, x + y, x - y)$ merupakan transformasi linear.

Contoh 10.2

Misalkan $F : R^3 \rightarrow R^2$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh:

$$F(x, y, z) = (x + 2y, 2x - 3z)$$

Tentukan apakah F merupakan transformasi linear?

Himpunan bagian dari W yang semua anggotanya mempunyai prapeta di V disebut daerah hasil (*range*) yang dituliskan sebagai:

$$R(F) = \{y \in W \mid \exists x \in V, y = F(x)\}$$

Bentuk khusus pemetaan yang akan dibahas pada bab ini adalah transformasi linear, yaitu pemetaan dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lain yang memenuhi aksioma kelinearan.

Definisi 10.1

Misalkan V dan W ruang vektor. Fungsi (pemetaan) dari V ke W yang dilambangkan dengan $F : V \rightarrow W$ disebut transformasi linear jika memenuhi dua aksioma berikut.

1. $F(u + v) = F(u) + F(v)$ untuk semua vektor u dan v dalam V.
2. $F(ku) = kF(u)$ untuk semua vektor u dalam V dan semua skalar k.

Kedua aksioma tersebut dapat diperlihatkan pada gambar 10.1 dan 10.2 berikut ini.

$$\begin{tikzcd}
u, v \arrow[r, "\text{Fungsi (pemetaan)}"] \arrow[d, "+"] & F(u), F(v) \arrow[d, "+"'] \\
u + v \arrow[r, "\text{Fungsi (pemetaan)}"'] & F(u) + F(v)
\end{tikzcd}$$

Gambar 10.1

Aksioma penjumlahan pada transformasi linear

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\text{Fungsi (pemetaan)}"] \arrow[d, "k"] & F(u) \arrow[d, "k"'] \\
ku \arrow[r, "\text{Fungsi (pemetaan)}"'] & F(ku) = kF(u)
\end{tikzcd}$$

Gambar 10.2

Aksioma perkalian dengan skalar pada transformasi linear

DAFTAR PUSTAKA

Andrianto, H. dan Prijono, A. 2006. *Menguasai Matriks dan Vektor.* Bandung: Rekayasa Sains.

Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi Kelima. Alih Bahasa: Pantur Silaban dan Nyoman Susila (ITB). Jakarta: Erlangga.

________________. 1971. *Elementary Linear Algebra.* Third Edition. New York: John Wiley & Sons.

________________. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear*. Edisi Ketujuh Jilid 1. Alih Bahasa: Hari Suminto, Lyndon Saputra. Batam Center: Interaksara.

Ayres, F. 1992. *Matriks. Seri Buku Schaum, Teori dan Soal*. Alih Bahasa: I. Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Gultom, B. 1985. *Teori Aljabar Linear*. Bandung: Tarsito.

Hadley, G. 1961. *Linear Algebra.* Addison-Wesley Publishing Co. Translation Copyright 1983. *Aljabar Linear.* Alih Bahasa: Naipospos, Noeniek Soemartoyo. Jakarta: Erlangga.

Imrona, M. 2013. *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Jacob, B. 1990. *Linear Algebra.* New York: W.H. Freeman and Company.

Mulyana, T. dan Karso. 2003. *Aljabar Linear.* Buku Materi Pokok PAMA4112/4SKS/MODUL 1–12. Pusat Penerbitan Universitas Terbuka.

Rasyad, R. 2003. *Aljabar Linear untuk Umum*. Jakarta: Grasindo.

Seymour Lipschutz, March Lipson. 1968. *Linear Algebra.* Third Edition. Schaum's Outlines. Translation Copyright 2006. *Aljabar Linear.* Edisi Ketiga. Alih Bahasa: Refina Indriasari. Jakarta: Erlangga.

Steven J. Leon. 1998. *Linear Algebra with Aplications.* Fifth Edition. Prentice-Hall, Inc. Translation Copyright 2006. *Aljabar Linear dan Aplikasinya.* Alih Bahasa: Ali Bondan. Jakarta: Erlangga.

Sutojo, T. dkk. 2010. *Teori dan Aplikasi Aljabar Linear dan Matriks dengan Implementasi Aljabar Linear dan Matriks Menggunakan Matlab*. Yogyakarta: Andi Offset.

Wiwiek A. 2006. *Aljabar Linear Dilengkapi dengan Program Matlab.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

PENGANTAR ALJABAR LINEAR

DISERTAI PETA KONSEP

- Ruang n-Euclidis
- Ruang Vektor Umum
- Ruang Bagian
- Kebebasan Linier
- Basis dan Dimensi
- Ruang Baris dan Ruang Kolom Matriks;
- Rank Penerapan terhadap Pencarian Basis
- Ruang Hasil Kali Dalam
- Panjang, Jarak, dan Sudut di Ruang Hasil Kali Dalam
- Basis Ortonormal; Proses Gram-Schmidt

Buku *Pengantar Aljabar Linear dengan Peta Konsep* ini merupakan buku Seri Aktif yang dilengkapi Lembar Aktivitas, dengan tujuan agar pembaca dapat melakukan aktivitas matematika (*doing math*) dalam memecahkan permasalahan yang diberikan. Latihan soal (*exercise*) yang bertujuan melatih pembaca agar terampil dalam membaca dan memahami buku teks matematika. Selain itu, buku ini juga disusun sebagai penunjang perkuliahan Aljabar Linear.

PENERBIT **PUSTAKA SETIA**

Jl. BKR (Lingkar Selatan) No. 162-164
Telp. (022) 5210588 | Fax. (022) 5224105
E-mail. pustaka_seti@yahoo.com
BANDUNG 40253

www.pustakasetia.com

9 789790 767133